BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

VÕ THỊ BÍCH KHUÊ

HÀM LỒI TOÁN TỬ, BẤT ĐẲNG THỨC MA TRẬN VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH
MÃ SỐ: 62.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

BÌNH ĐỊNH - 2018

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Quy Nhơn

Tập thể hướng dẫn: **PGS. TS. ĐINH THANH ĐỨC**
TS. ĐINH TRUNG HOÀ

Phản biện 1: PGS. TS. Phạm Tiến Sơn

Phản biện 2: TS. Hồ Minh Toàn

Phản biện 3: PGS. TS. Lê Anh Vũ

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án tại
Trường Đại học Quy Nhơn, vào lúc: ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2018

Có thể tìm hiểu luận án tại:

Thư viện Quốc gia Việt Nam
Trung tâm Thông tin tư liệu Trường Đại học Quy Nhơn

LỜI CAM ĐOAN

Luận án này được thực hiện và hoàn thành tại Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Đinh Thanh Đức và TS. Đinh Trung Hoà. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả được trình bày trong luận án này là mới và trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trước đó.

Bình Định, năm 2018

Tác giả

Võ Thị Bích Khuê

Lời cảm ơn

Luận án này được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của PGS. TS. Đinh Thanh Đức, TS. Đinh Trung Hoà và nhiều người khác trong suốt những năm tôi là nghiên cứu sinh tại Trường Đại học Quy Nhơn. Nhân dịp này, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn đến những người đã giúp đỡ tôi.

Đầu tiên, tôi trân trọng bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến PGS. TS. Đinh Thanh Đức, thầy đã dành nhiều thời gian quý báu để trao đổi với tôi về các vấn đề toán học, tìm và gửi cho tôi các tài liệu tham khảo liên quan đến vấn đề nghiên cứu của tôi. Mặc dù bận rộn nhiều với công việc quản lý, nhưng thầy rất cố gắng và nhiệt tình thu xếp thời gian để tôi có được sự thoải mái và làm việc hiệu quả tại Trường Đại học Quy Nhơn. Nếu không có sự hỗ trợ nhiệt tình của thầy, tôi khó có thể hoàn thành được luận án của mình.

Tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến TS. Đinh Trung Hoà, người thầy, người bạn, và là người đồng hành rất kiên trì, luôn động viên tôi trong hành trình làm nghiên cứu sinh. Thầy là một người rất năng động và thân thiện, đồng thời cũng rất nghiêm túc trong việc nghiên cứu khoa học. Thầy đã tạo cơ hội cho tôi tham dự các hội thảo và tiếp xúc với các nhà nghiên cứu giỏi trong cùng lĩnh vực nghiên cứu, tạo động lực và sự say mê làm việc cho tôi.

Lời cảm ơn chân thành gửi đến giáo sư Hiroyuki Osaka, Trường Đại học Ritsumeikan, Nhật Bản, cũng là đồng tác giả trong bài báo đầu tiên của tôi, đã hỗ trợ và giúp tôi có được cơ hội tham dự và báo cáo tại hội thảo quốc tế tổ chức tại Trường Đại học Ritsumeikan, là một trong những động lực đầu tiên khuyến khích tôi trên con đường nghiên cứu.

Lời cảm ơn đặc biệt đến các giảng viên khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn. Cảm ơn các thầy cô đã rất gần gũi và nhiệt tình giúp đỡ tôi trong chuyên môn, tạo điều kiện tốt nhất cho một nghiên cứu sinh xa nhà như tôi. Cảm ơn thành phố biển Quy Nhơn hiền hoà và thân thiện, đã giúp tôi có được sự thoải mái và vui tươi trong suốt thời gian học tập tại đây.

Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo và các thầy cô Trường Đại học Tài chính - Marketing, đặc biệt các thầy cô Bộ môn Toán - Thống kê, đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành nghiên cứu sinh.

Cảm ơn tất cả những người bạn nghiên cứu sinh ở Trường Đại học Quy Nhơn, đặc biệt người em gái Dư Thị Hoà Bình đến từ miền Bắc xa xôi, đã hỗ trợ và giúp đỡ trong quá trình tôi học nghiên cứu sinh.

Sau cùng nhưng có ý nghĩa nhất, tôi muốn cảm ơn gia đình tôi đã luôn bên cạnh tôi, khuyến khích, hỗ trợ và giúp đỡ tôi. Cảm ơn mẹ đã luôn ủng hộ con trong mọi quyết định, luôn bên con những lúc con đau ốm. Cảm ơn chồng đã luôn san sẻ mọi khó khăn với em. Và lời cảm ơn đặc biệt nhất dành cho thiên thần nhỏ của tôi, cảm ơn con đã đến với mẹ. Luận án này là món quà mẹ dành cho con.

Bình Định, 2018

Võ Thị Bích Khuê

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{M}_n$	:	Không gian các ma trận phức cấp n
$\mathbb{H}$	:	Không gian Hilbert
$B(\mathbb{H})$	:	Đại số các toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert $\mathbb{H}$
I_n, O_n	:	Ma trận đơn vị và ma trận không tương ứng
$\langle x, y\rangle$	:	Tích vô hướng của các véctơ x và y
$\mathbb{C}^n$	:	Không gian tuyến tính của các bộ n số phức
A^*	:	Chuyển vị liên hợp của ma trận A
$\mathbb{H}_n$	:	Tập tất cả các ma trận Hermiteian cấp n
$\mathbb{H}_n^+$	:	Tập tất cả các ma trận nửa xác định dương
$\mathbb{P}_n$	:	Tập tất cả các ma trận xác định dương
$\|A\|$	:	Ma trận nửa xác định dương $(A^*A)^{1/2}$
$\lambda(A)$	:	Giá trị riêng của ma trận A
$\sigma(A)$	:	Phổ của ma trận A
$s(A)$	:	Tập các giá trị kỳ dị của ma trận A
$\|\|A\|\|$	:	Chuẩn toán tử của ma trận A
$\|\|\|A\|\|\|$	:	Chuẩn bất biến của ma trận A
$x \prec y$	:	x được làm lớn bởi y
$x \prec_w y$	:	x được làm lớn yếu bởi y
$A\sharp_t B$	:	Trung bình nhân có trọng số t của hai ma trận A và B
$A\sharp B$	:	Trung bình nhân của hai ma trận A và B
$A\nabla B$	:	Trung bình cộng của hai ma trận A và B
$A!B$	:	Trung bình điều hoà của hai ma trận A và B
$A : B$	:	Tổng song song của ma trận A và B
$M_p(A, B, t)$	:	Trung bình luỹ thừa của A và B
$opgx(p, h, K)$	:	Lớp các hàm (p, h)-lồi toán tử trên K
A_+, A_-	:	Phần dương và phần âm tương ứng của ma trận A.

Lời giới thiệu

Ngày nay, tầm quan trọng của lý thuyết ma trận được biết đến trong nhiều lĩnh vực về kỹ thuật, xác suất thống kê, thông tin lượng tử, giải tích số, sinh học và khoa học xã hội. Đặc biệt, các ma trận xác định dương xuất hiện như các điểm dữ liệu trong sự khác nhau đa dạng của các cài đặt: các ma trận hiệp phương sai trong thống kê [20], các yếu tố của không gian tìm kiếm trong lập trình lồi và nửa xác định dương [1] và các ma trận trù mật trong thông tin lượng tử [72].

Trong vài thập kỷ qua, giải tích ma trận trở thành một chủ đề độc lập trong toán học bởi một số lượng lớn các ứng dụng của nó [5, 7, 17, 24, 25, 26, 27, 34, 41, 46, 85]. Chủ đề về giải tích ma trận được thảo luận trên đại số các ma trận, hoặc tương đương, đại số của các toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert hữu hạn chiều. Đại số các toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert hữu hạn chiều đẳng cấu với đại số ma trận có số chiều bằng với số chiều của không gian Hilbert tương ứng. Một trong các công cụ chính trong giải tích ma trận là định lý phổ trong trường hợp hữu hạn chiều. Khá nhiều kết quả trong giải tích ma trận có thể chuyển sang cho các toán tử tuyến tính mà không gặp khó khăn. Đồng thời, nhiều kết quả quan trọng trước đây cho ma trận không còn đúng cho các toán tử trong không gian vô hạn chiều. Gần đây, nhiều lĩnh vực của giải tích ma trận được nghiên cứu kỹ lưỡng như lý thuyết về các hàm đơn điệu ma trận và hàm lồi ma trận, lý thuyết về trung bình ma trận, lý thuyết phân hoá trong thông tin lượng tử,... Đặc biệt, cộng đồng vật lý và toán học chú ý nhiều hơn về các chủ đề bất đẳng thức ma trận và các hàm ma trận vì tính ứng dụng hữu ích của chúng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học cũng như của vật lý.

Năm 1930, von Neumann đã giới thiệu một hệ các tiên đề toán học của cơ học lượng tử như sau:

(i) Mỗi hệ lượng tử hữu hạn chiều gồm n phần tử được liên kết với một không gian Hilbert 2^n chiều;

(ii) Mỗi đại lượng quan sát được trong một hệ lượng tử tương ứng với một ma trận Hermite có cùng kích thước;

(iii) Mỗi trạng thái lượng tử được liên kết với một ma trận trù mật (là ma trận nửa xác định dương có vết bằng 1).

Do đó, lý thuyết ma trận, giải tích ma trận và lý thuyết toán tử trở thành nền tảng của cơ học lượng tử, một số vấn đề trong cơ học lượng tử có thể được diễn giải theo cách khác bằng ngôn ngữ ma trận. Mặt khác, trong những thập kỷ gần đây cùng với sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết thông tin lượng tử, giải tích ma trận trở nên phổ biến và quan trọng hơn.

Nhắc lại rằng nếu $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ là các giá trị riêng của một ma trận Hermite A thì A có thể được biểu diễn dưới dạng

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j,$$

với P_j là phép chiếu trực giao trên không gian con sinh ra bởi các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_j. Và với mỗi hàm f được xác định tại λ_i, ma trận $f(A)$ được định nghĩa theo định lý phổ

$$f(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) P_j. \tag{0.0.1}$$

Trong lý thuyết lượng tử, hầu hết các đại lượng lượng tử quan trọng được định nghĩa với vết Tr kinh điển. Một đại lượng quan trọng là entropy lượng tử. *Entropy lượng tử* của một ma trận trù mật A là giá trị

$$-Tr(A\log(A)),$$

với ma trận $\log(A)$ được xác định bởi (0.0.1).

Nhận xét rằng hàm $\log t$ là đơn điệu ma trận trên $(0,\infty)$, trong khi hàm $t\log t$ là lồi ma trận trên $(0,\infty)$. Nhắc lại rằng một hàm f là đơn điệu toán tử trên $(0,\infty)$ khi và chỉ khi $tf(t)$ là lồi toán tử trên $(0,\infty)$. Hàm đơn điệu toán tử lần đầu tiên được K. Loewner nghiên cứu trong bài báo [66] của ông năm 1930. Trong cùng thập kỷ, F. Krauss đã giới thiệu hàm lồi toán tử trong [60]. Ngày nay, lý thuyết về các hàm như vậy được nghiên cứu mạnh và trở thành một chủ đề quan trọng trong lý thuyết ma trận vì những ứng dụng rộng lớn của chúng trong lý thuyết ma trận cũng như trong lý thuyết lượng tử [72].

Một hàm liên tục f xác định trên $K\subset\mathbb{R}$ được gọi là:

- *đơn điệu ma trận cấp n* nếu với mọi ma trận Hermite A và B cấp n có phổ trong K thì

$$A\le B \quad\Longrightarrow\quad f(A)\le f(B).$$

- *lồi ma trận cấp n* nếu với mọi ma trận Hermite A và B cấp n có phổ trong K thì

$$f(\lambda A+(1-\lambda)B)\le \lambda f(A)+(1-\lambda)f(B).$$

Nếu hàm f là *đơn điệu ma trận* (hay *lồi ma trận*) với ma trận các cấp thì gọi là *đơn điệu toán tử* (hay *lồi toán tử* tương ứng).

Một trong các ví dụ rất quan trọng của hàm đơn điệu toán tử và lồi toán tử là $f(t)=t^s$. Loewner đã chứng minh rằng hàm này là đơn điệu toán tử trên $\mathbb{R}^+$ khi và chỉ khi luỹ thừa $s\in[0,1]$, và f là lồi toán tử trên $(0,\infty)$ khi và chỉ khi $s\in[-1,0]\cup[1,2]$.

Bây giờ chúng tôi sẽ đề cập đến lý thuyết trung bình vô hướng, lý thuyết này đã cho chúng tôi những gợi ý đầu tiên cho các nghiên cứu trong luận án này.

Một *trung bình* M của hai số không âm là một hàm từ $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ đến $\mathbb{R}^+$ sao cho:

1) $M(x,x)=x$, với mọi $x\in\mathbb{R}^+$;

2) $M(x,y)=M(y,x)$, với mọi $x,y\in\mathbb{R}^+$;

3) Nếu $x<y$, thì $x<M(x,y)<y$;

4) Nếu $x<x_0$ và $y<y_0$, thì $M(x,y)<M(x_0,y_0)$;

5) $M(x,y)$ liên tục;

6) $M(tx,ty)=tM(x,y)$ với $t,x,y\in\mathbb{R}^+$.

Một hàm hai biến $M(x,y)$ thoả 6) có thể rút gọn thành hàm một biến $f(x):=M(1,x)$. Cụ thể, $M(x,y)$ nhận được từ f bởi công thức $M(x,y)=xf(x^{-1}y)$. Chú ý rằng hàm f tương ứng với M là tăng đơn điệu trên $\mathbb{R}^+$. Mối quan hệ này hình thành nên một tương ứng 1-1 giữa các trung bình và hàm tăng đơn điệu trên $\mathbb{R}^+$.

Trong vài thập kỷ gần đây, xuất hiện sự quan tâm mới trong việc phát triển các lý thuyết về trung bình của các phần tử trong tập $\mathbb{H}_n^+$ các ma trận nửa xác định dương trong đại số $\mathbb{M}_n$. Từ một nghiên cứu về các kết nối mạch điện, Anderson và Duffin [3] giới thiệu một phép toán hai ngôi $A:B$, gọi là phép cộng song song cho cặp các ma trận nửa xác định dương. Tiếp theo đó, Anderson và Trapp [4] mở rộng khái niệm này cho các toán tử tuyến tính dương trên một không gian Hilbert và chứng minh sự quan trọng của nó trong lý thuyết toán tử. Bên cạnh đó, vấn đề tìm trung bình nhân ma trận đã tồn tại khá lâu vì tích của hai ma trận nửa xác định dương không luôn là ma trận nửa xác định dương. Năm 1975, Pusz và Woronowicz [79] giải quyết vấn đề này và chứng minh rằng $A\sharp B:=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$

- trung bình nhận của hai ma trận xác định dương A và B - là nghiệm duy nhất của phương trình ma trận Riccati

$$XA^{-1}X = B.$$

Năm 1980, Ando và Kubo [61] phát triển một lý thuyết về các trung bình toán tử trên $\mathbb{H}_n^+$. Một phép toán hai ngôi σ trên lớp các toán tử dương, $(A, B) \mapsto A\sigma B$, được gọi là *phép nối* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Tính đơn điệu: $A \leq C$ và $B \leq D$ thì $A\sigma B \leq C\sigma D$;

(ii) Tính chuyển đổi: $C^*(A\sigma B)C \leq (C^*AC)\sigma(C^*BC)$;

(iii) Tính liên tục: $A_m \downarrow A$ và $B_m \downarrow B$ thì $A_m\sigma B_m \downarrow A\sigma B$ ($A_m \downarrow A$ có nghĩa rằng dãy A_m hội tụ mạnh theo chuẩn đến A).

Một *trung bình* σ là một phép nối thoả mãn điều kiện chuẩn hoá:

(iv) $I\sigma I = I$ (với I là phần tử đơn vị của $\mathbb{M}_n$).

Kết quả chính trong lý thuyết Kubo-Ando là chứng minh sự tồn tại của một đẳng cấu afin từ lớp các trung bình toán tử vào lớp các hàm đơn điệu toán tử dương trên $\mathbb{R}^+$ và được miêu tả bởi công thức

$$A\sigma_f B = A^{1/2} f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}.$$

Công thức này lần nữa xác định trung bình nhân theo Pusz và Woronowicz được định nghĩa một cách tự nhiên tương ứng với hàm đơn điệu toán tử $f(t) = t^{1/2}$. Một trung bình σ được gọi là *đối xứng* nếu $A\sigma B = B\sigma A$ với mọi ma trận dương A và B. Hoặc tương đương, hàm biểu diễn f của một trung bình đối xứng thoả $f(t) = tf(t^{-1})$, $t \in (0, \infty)$.

Sau đó, Morozoca va Chentsov[69] nghiên cứu các tích trong đơn điệu theo các ánh xạ ngẫu nhiên trên không gian các ma trận và các metric đơn điệu trong lý thuyết lượng tử. Năm 1996, Petz[78] chứng minh rằng có một sự tương ứng giữa các metric đơn điệu và các trung bình toán tử theo nghĩa Kubo-Ando, và do đó, kết nối ba lý thuyết quan trọng trong lý thuyết thông tin lượng tử và giải tích ma trận.

Lưu ý rằng, cùng với entropy lượng tử của các trạng thái lượng tử, nhiều đại lượng lượng tử quan trọng khác được định nghĩa với trung bình toán tử, các hàm lồi toán tử và vết kinh điển.

Ví dụ 0.0.1. Cho hai ma trận trù mật A và B, *entropy tương đối lượng tử* [20] của A đối với B được định nghĩa

$$S(A||B) = -Tr(A(\log A - \log B)).$$

Biên Chernoff lượng tử [10] trong lý thuyết kiểm nghiệm giả thiết được cho bởi biểu thức sau: Cho các ma trận nửa xác định dương A, B,

$$Q(A, B) = \min_{0 \leq s \leq 1} \{Tr(A^s B^{1-s})\}.$$

Một trong các đại lượng quan trọng trong lý thuyết lượng tử là *sự phân kỳ Renyi* [20]: Với $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$,

$$D_\alpha(A||B) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \frac{Tr(A^s B^{1-s})}{Tr(A)}, \quad D_1 = \frac{Tr(A(\log A - \log B))}{Tr(A)}.$$

Tất cả các đại lượng được liệt kê ở trên là các trường hợp đặc biệt của f-phân kỳ lượng tử trong lý thuyết lượng tử với f là hàm lồi toán tử [45]. Vì vậy, lý thuyết về hàm ma trận là phần quan trọng trong giải tích ma trận cũng như của lý thuyết thông tin lượng tử.

Bây giờ cho σ và τ là các trung bình toán tử tuỳ ý (không nhất thiết là trung bình theo nghĩa Kubo-Ando [61]). Chúng tôi giới thiệu một tiếp cận chung về tính lồi toán tử như sau.

Một hàm lồi liên tục không âm f xác định trên $\mathbb{R}^+$ được gọi là *$\sigma\tau$-lồi* nếu với mọi ma trận xác định dương A và B,

$$f(A\sigma B) \leq f(A)\tau f(B). \tag{0.0.4}$$

Khi σ và τ là các trung bình cộng, hàm f thoả bất đẳng thức trên là lồi toán tử. Khi σ là trung bình cộng và τ là trung bình nhân, hàm f thoả (0.0.4) được gọi là log-*lồi*. Các hàm như vậy được mô tả đầy đủ bởi Hiai và Ando trong [11] như các hàm toán tử đơn điệu giảm.

Trung bình luỹ thừa ma trận của các ma trận nửa xác định dương A và B lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Bhagwat và Subramanian [15] như sau

$$M_p(A, B, t) = (tA^p + (1-t)B^p)^{1/p}, \quad \text{for} \quad p \in \mathbb{R}.$$

Trung bình luỹ thừa ma trận $M_p(A, B, t)$ là trung bình Kubo-Ando khi và chỉ khi $p = \pm 1$. Tuy nhiên, trung bình luỹ thừa với $p > 1$ có nhiều ứng dụng quan trọng trong vật lý toán và trong lý thuyết các không gian toán tử [21].

Trong luận án này, chúng tôi sử dụng (0.0.4) để xác định một số dạng lồi toán tử mới với trung bình luỹ thừa ma trận $M_p(A, B, t)$. Chúng tôi nghiên cứu các tính chất của các hàm như vậy và chứng minh một số bất đẳng thức quen thuộc cho chúng. Chúng tôi cũng cung cấp một số các điều kiện tương đương để một hàm là lồi toán tử theo nghĩa mới này.

Bây giờ chúng ta xem xét cách giải thích hình học đối với các trung bình vô hướng và trung bình ma trận. Cho $0 \leq a \leq x \leq b$. Rõ ràng rằng trung bình cộng $(a+b)/2$ là nghiệm duy nhất của bài toán tối ưu

$$(x-a)^2 + (x-b)^2 \to \min.$$

Và với mọi trung bình vô hướng M trên $\mathbb{R}^+$ thì

$$M(a, b) - a \leq b - a.$$

Chúng ta gọi tính chất này là *tính chất điểm giữa*.

Năm 2013, Audenaert nghiên cứu tính chất điểm giữa đối với trung bình ma trận trong [9]. Gần đây, Dinh Trung Hoa, Dumitru Raluca and Franco Jose [49] tiếp tục nghiên cứu tính chất này đối với trung bình luỹ thừa ma trận. Họ cung cấp một vài lời giải riêng cho phỏng đoán của Audenaert trong [9] và phản ví dụ cho phỏng đoán với $p > 0$.

Từ tính chất 3) trong định nghĩa về trung bình vô hướng, rõ ràng rằng

$$\frac{a+b}{2} - M(a, b) \leq \frac{b-a}{2}. \tag{0.0.5}$$

Mặt khác, $M(a, b)$ nằm bên trong hình cầu có tâm là trung bình cộng $\dfrac{a+b}{2}$ với bán kính bằng một nửa khoảng cách giữa a và b. Chúng ta gọi đây là *tính chất trong hình cầu* của các trung bình vô hướng với khoảng cách Euclid trên $\mathbb{R}$. Chú ý rằng với $s \in [0, 1]$ và $p > 0$, trung bình nhân có trọng s là $M(a, b) = a^{1-s}b^s$ và trung bình luỹ thừa (hay trung bình nhị thức) trọng s là $M_p(a, b, s) = ((1-s)a^p + sb^p)^{1/p}$ thoả mãn tính chất (0.0.5).

Bây giờ, cho A và B là các ma trận xác định dương. Hàm khoảng cách Riemann trên tập các ma trận xác định dương được định nghĩa:

$$\delta_R(A, B) = \left(\sum_i \log^2(\lambda_i(A^{-1}B)) \right)^{1/2}.$$

Năm 2005, Moakher [67] chứng minh rằng trung bình nhân $A\sharp B$ là cực tiểu duy nhất của tổng các bình phương của khoảng cách:

$$\delta_R^2(X, A) + \delta_R^2(X, B) \to \min, \quad X \geq 0.$$

Gần như đồng thời, Bhatia và Holbrook [18] đã chứng minh rằng đường cong

$$\gamma(s) = A\sharp_s B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^s A^{1/2} \quad (s \in [0,1])$$

là đường trắc địa (ngắn nhất) duy nhất nối A và B. Hơn nữa, trung bình nhân $A\sharp B$ là điểm giữa của đường trắc địa này. Do đó, bức tranh về trung bình ma trận khác với bức tranh về trung bình vô hướng.

Chú ý rằng, một trong các phiên bản ma trận tổng quát về tính chất trong hình cầu là bất đẳng thức nổi tiếng Powers-Stømer được chứng minh bởi Audenaert và các đồng nghiệp [10], và sau đó Ogata [74] mở rộng ra cho đại số toán tử: với mọi ma trận nửa xác định dương và mọi $s \in [0,1]$,

$$Tr(A + B - |A - B|) \le 2Tr(A^s B^{1-s}). \tag{0.0.6}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, các tác giả trong [23] giải một bài toán trong lý thuyết kiểm định giả thiết: xác định sự khái quát hoá lượng tử của biên Chernoff. Đại lượng bên trái của (0.0.6) được gọi là *biên Chernoff lượng tử phi logarit*. Cùng với tầm quan trọng được đề cập ở trên của trung bình ma trận, bất đẳng thức Powers-Stømer lần nữa chứng tỏ rằng bức tranh về trung bình ma trận thật sự thú vị và phức tạp.

Mục đích thứ hai của luận án này là nghiên cứu các phiên bản ma trận khác nhau của tính chất trong hình cầu (0.0.5). Chính xác hơn, chúng tôi nghiên cứu các bất đẳng thức liên quan đến ma trận, trung bình ma trận, vết, chuẩn, và các hàm ma trận. Chúng tôi cũng xem xét tính chất trong hình cầu cho trung bình ma trận đối với hàm khoảng cách trên đa tạp các ma trận nửa xác định dương.

Mục đích của luận án

1. Nghiên cứu một số dạng mới các hàm lồi toán tử đối với các trung bình ma trận, các tính chất của chúng và chứng minh một số bất đẳng thức nổi tiếng cho chúng.

2. Mô tả các dạng mới của các hàm lồi toán tử bằng các bất đẳng thức ma trận.

3. Nghiên cứu các bất đẳng thức trung bình cộng-nhân liên quan đến các trung bình ma trận tổng quát.

4. Nghiên cứu các bất đẳng thức ngược cho trung bình Heinz ma trận và các chuẩn bất biến unita.

5. Nghiên cứu các tính chất trong hình cầu cho các trung bình ma trận đối với các chuẩn bất biến unita.

Phương pháp luận

Công cụ chính trong nghiên cứu của chúng tôi là định lý phổ đối với các ma trận Hermite. Sử dụng các kỹ thuật trong lý thuyết các trung bình ma trận theo nghĩa Kubo-Ando để định nghĩa các dạng mới của tính lồi toán tử. Vài kỹ thuật cơ bản trong lý thuyết các hàm đơn điệu toán tử và hàm lồi toán tử cũng được sử dụng trong luận án. Chúng tôi cũng dùng các kiến thức cơ bản trong lý thuyết ma trận liên quan đến chuẩn bất biến unita, vết, v.v...

Các kết quả chính của luận án được trình bày trong các semina tại khoa Toán, trường Đại học Quy Nhơn và ở các hội thảo sau:

1. Hội nghị Toán học Miền Trung-Tây Nguyên lần thứ hai, Đại học Đà Lạt, 11-2017.
2. Hội nghị quốc tế lần thứ 6 về giải tích ma trận và các ứng dụng (ICMAA 2017), Đại học Duy Tân, 6-2017.
3. Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô (DAHITO). Cao đẳng Sư phạm Đắc Lắc, 11-2016.
4. Hội thảo quốc tế về Lý thuyết thông tin lượng tử và một số vấn đề liên quan, VIASM, 9-2015.
5. Hội nghị Toán học Miền Trung - Tây Nguyên, Đại học Quy Nhơn, 8-2015.
6. Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô (DAHITO), Hạ Long, 12-2014.

7. Hội thảo quốc tế về Lý thuyết thông tin lượng tử và một số vấn đề liên quan, Đại học Ritsumeikan, Nhật Bản, 9-2014.

Nội dung chính của Luận án.

Trong Lời giới thiệu, chúng tôi cung cấp các kiến thức nền về các vấn đề được xem xét trong luận án. Ý nghĩa và động lực của việc nghiên cứu cũng được giải thích. Chúng tôi trình bày nội dung ngắn gọn của luận án với các kết quả chính ở hai chương cuối.

Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản được sử dụng trong luận án.

Trong chương 2, chúng tôi định nghĩa và nghiên cứu các dạng mới về hàm lồi toán tử, các tính chất của chúng, chứng minh một số bất đẳng thức phổ biến đối với chúng và đạt được một loạt các mô tả.

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu tính chất trong hình cầu cho trung bình ma trận. Chúng tôi cũng chứng minh một số bất đẳng thức ngược cho trung bình Heinz ma trận và cung cấp một mô tả mới về trung bình cộng ma trận.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Cho $\mathbb{N}$ là tập tất cả các số tự nhiên. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\mathbb{M}_n$ là đại số các ma trận phức cấp $n \times n$. Ký hiệu I và O tương ứng là ma trận đơn vị và ma trận không của $\mathbb{M}_n$. Trong luận án này, chúng tôi xem xét các bài toán đối với các ma trận phức vuông, hay nói cách khác là các toán tử trong không gian Hilbert hữu hạn chiều. Chúng tôi sẽ nhắc cụ thể trong trường hợp vô hạn chiều.

Nhắc lại rằng, với hai vec tơ $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{C}^n$, *tích trong* $\langle x, y\rangle$ của x và y được định nghĩa $\langle x, y\rangle \equiv \sum_j x_j \overline{y}_j$. Với A là ma trận trong $\mathbb{M}_n$, *chuyển vị liên hợp* hay *phụ hợp* A^* của A là liên hợp phức của chuyển vị A^T. Khi đó, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Một ma trận A được gọi là:

– *tự liên hợp* hay *Hermite* nếu $A = A^*$, hoặc được xác định $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$;
– *unita* nếu $AA^* = A^*A = I$;
– *nửa xác định dương* (ký hiệu $A \geq 0$) nếu

$$\langle x, Ax\rangle \geq 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{C}^n; \tag{1.1}$$

– *xác định dương* (ký hiệu $A > 0$) nếu (1.1) là ngặt với mọi vec tơ khác không $x \in \mathbb{C}^n$;
– *phép chiếu trực giao* nếu $A = A^* = A^2$.

Lưu ý rằng trong trường hợp hữu hạn chiều, $A > 0$ khi và chỉ khi A khả nghịch và $A \geq 0$. Một ma trận nửa xác định dương là ma trận Hermite. Hơn nữa, chúng tôi biểu thị $\mathbb{H}_n$ là tập các ma trân vuông Hermite cấp n, $\mathbb{H}_n^+$ và $\mathbb{P}_n$ tương ứng là tập các ma trận nửa xác định dương và xác định dương.

Nhắc lại rằng với mọi ma trận A, ma trận A^*A là nửa xác định dương. *Module* $|A|$ của A được định nghĩa bởi $|A| := (A^*A)^{1/2}$.

Thứ tự riêng (*thứ tự Loewner*) trên tập $\mathbb{H}_n$ các ma trận Hermite được định nghĩa

$$A \geq B \quad \text{nếu} \quad A - B \geq 0.$$

Một ma trận nửa xác định dương A có vết bằng 1 được gọi là *ma trận trù mật*, liên kết với một trạng thái lượng tử trong cùng hệ lượng tử. Theo nghĩa này, các phép chiếu trực giao có hạng bằng 1 trong $\mathbb{M}_n$ gọi là *trạng thái thuần*. Các ma trận nửa xác định dương gọi là *trạng thái hỗn hợp*.

Chuẩn toán tử của ma trận/toán tử A được định nghĩa

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{H}, \|x\| \leq 1\}, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Một toán tử A gọi là một *phép co* nếu $\|A\| \leq 1$.

Một trong những thông tin quan trọng về toán tử/ma trận là phổ của chúng. Phổ $\sigma(A)$ của một toán tử tuyến tính A trong không gian Hilbert là các giá trị $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $A - \lambda I$ không khả nghịch. Do đó, trong trường hợp hữu hạn chiều, *phổ* $\sigma(A)$ của A là tập các giá trị riêng của A, hay nói cách khác là các giá trị λ sao cho $Ax = \lambda x$. Các giá trị riêng $s_i(A)$ của module $|A|$ được gọi là *giá trị kỳ dị* (cũng gọi là giá trị s) của A. Với $A \in \mathbb{M}_n$, ký hiệu $s(A) \equiv (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A))$ có nghĩa là $s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A)$.

Bây giờ chúng tôi nhắc lại một số chuẩn quan trọng được nhắc đến trong luận án.

Chuẩn Ky Fan k

$$||A||_k = \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

Chuẩn Schatten p

$$||A||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p(A)\right)^{1/p}.$$

Với $p = 2$, *Chuẩn Frobenius* hay còn gọi là *chuẩn Hilbert-Schmidt*

$$\|A\|_2 = (Tr|A|^2)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2(A)\right)^{1/2}.$$

Định nghĩa 1.0.1. Chuẩn $|||\cdot|||$ trên $\mathbb{M}_n$ gọi là *bất biến unita* nếu với mọi ma trận $A \in \mathbb{M}_n$ và các ma trận unita $U, V \in \mathbb{M}_n$,

$$|||UAV||| = |||A|||.$$

Chương 2

Các dạng mới của hàm lồi toán tử và các bất đẳng thức liên quan

Là khái niệm cơ bản nhất trong giải tích lồi và lý thuyết tối ưu, tính lồi của các hàm được nghiên cứu mạnh trong nhiều nội dung khác nhau của toán học thuần tuý và toán học ứng dụng. Mục đích chính của chương này là xác định các dạng mới của hàm lồi toán tử dựa theo lý thuyết của Kubo-Ando về trung bình hai ma trận, thậm chí của một số ma trận [77]. Chính xác hơn, chúng tôi sử dụng họ các trung bình luỹ thừa ma trận để xác định các dạng mới của hàm lồi toán tử gọi là hàm (r,s)-*lồi* toán tử và hàm (p,h)-*lồi* toán tử. Nghiên cứu các tính chất của chúng, chúng tôi đã chứng minh một số bất đẳng thức phổ biến cho chúng. Chúng tôi cũng cung cấp các mô tả tương tự cho hàm (r,s)-*lồi* toán tử và (p,h)-lồi toán tử.

Các kết quả của chương này được trích từ công trình [51] và [48].

2.1 Các hàm (p,h)-lồi toán tử

Trong chương này chúng tôi định nghĩa một kiểu mới của hàm lồi toán tử gọi là (p,h)-lồi toán tử. Các kết quả chính của chương này dựa theo công trình [51].

Nhắc lại rằng cho p là một số dương tuỳ ý, J là tập con của $\mathbb{R}^+$ chứa đoạn $[0,1]$, và K $(\subset \mathbb{R}^+)$ là một tập con p-lồi của $\mathbb{R}^+$ (tức là $[\alpha x^p + (1-\alpha)y^p]^{1/p} \in K$ với mọi $x, y \in K$ và $\alpha \in [0,1]$).

Chúng tôi định nghĩa một lớp mới các hàm (p,h)-lồi toán tử như sau.

Định nghĩa 2.1.1. Cho $h : J \to \mathbb{R}^+$ là một hàm nhân tính trên khác không. Một hàm không âm $f : K \to \mathbb{R}$ được gọi là (p,h)-*lồi toán tử* (hay thuộc lớp *opgx*(p,h,K)) nếu với mọi $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ với $\sigma(A), \sigma(B) \subset K$, và với mọi $\alpha \in (0,1)$,

$$f\left([\alpha A^p + (1-\alpha)B^p]^{1/p}\right) \le h(\alpha)f(A) + h(1-\alpha)f(B).$$

Khi $p = 1$, $h(\alpha) = \alpha$, chúng tôi nhận được định nghĩa thông thường của các hàm lồi toán tử trên $\mathbb{R}^+$.

Chú ý 2.1.1. *Một hàm (p,h)-lồi toán tử có thể là đơn điệu toán tử hoặc lồi toán tử. Tuy nhiên, có nhiều hàm (p,h)-lồi toán tử không là hàm đơn điệu toán tử mà cũng không là hàm lồi toán tử.*

2.1.1 Một số tính chất của hàm (p,h)-lồi toán tử

Trong phần này, chúng tôi chứng minh một số tính chất của các hàm (p,h)-lồi toán tử.

Định lý 2.1.1. *Cho $opgx(p,h,K)$ là lớp các hàm (p,h)-lồi toán tử. Khi đó,*

(i) Nếu $f, g \in opgx(p,h,K)$ và $\lambda > 0$, thì $f+g, \lambda f \in opgx(p,h,K)$;

(ii) *Cho h_1 và h_2 là các hàm nhân tính trên, không âm, khác không xác định trên khoảng J với $h_2 \le h_1$ trên $(0,1)$. Nếu $f \in opgx(p, h_2, K)$, thì $f \in opgx(p, h_1, K)$;*

(iii) *Cho $f \in opgx(p_2, h, K)$ sao cho f là hàm đơn điệu toán tử trên K. Nếu $1 \le p_1 \le p_2$, thì $f \in opgx(p_1, h, K)$.*

Định lý 2.1.2. *Cho K là một khoảng trong $\mathbb{R}^+$ sao cho $0 \in K$.*

(i) *Nếu $f \in opgx(p, h, K)$ sao cho $f(0) = 0$, thì*

$$f\left([\alpha A^p + \beta B^p]^{1/p}\right) \le h(\alpha)f(A) + h(\beta)f(B) \tag{2.1.6}$$

đúng với các ma trận xác định dương tuỳ ý A, B có phổ thuộc K và mọi $\alpha, \beta \ge 0$ sao cho $\alpha + \beta \le 1$;

(ii) *Cho h là một hàm không âm sao cho $h(\alpha) < 1/2$ với $\alpha \in (0, 1/2)$. Nếu f là một hàm không âm thoả (2.1.6) với mọi ma trận A, B có phổ trong K và với mọi $\alpha, \beta > 0$ thoả $\alpha + \beta \le 1$, thì $f(0) = 0$.*

Hệ quả 2.1.1. *Cho $s > 0$, đặt $h_s(x) = x^s$ $(x > 0)$, và $0 \in K \subset \mathbb{R}^+$. Với mọi $f \in opgx(p, h_s, K)$, bất đẳng thức (2.1.6) đúng với mọi $\alpha, \beta \ge 0$ thoả $\alpha + \beta \le 1$ khi và chỉ khi $f(0) = 0$.*

2.1.2 Bất đẳng thức dạng Jensen và các ứng dụng

Nhắc lại, bất đẳng thức Jensen có trọng số cho một hàm f liên tục, lồi trên một khoảng K thỏa

$$f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \le \sum \lambda_i f(x_i), \qquad \forall x_i \in K, \lambda_i \in (0,1), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Định lý 2.1.3. *Cho h là một hàm nhân tính trên, không âm xác định trên J và $f \in opgx(p, h, K)$. Khi đó với mọi k ma trận tự liên hợp A_i có phổ trong K và với mọi $\alpha_i (i = 1, 2, ..., k)$ thoả $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$,*

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i^p\right]^{1/p}\right) \le \sum_{i=1}^{k} h(\alpha_i) f(A_i). \tag{2.1.8}$$

Cho E là một tập khác rỗng, gồm hữu hạn các ma trận tự liên hợp A_i $(i \in E)$ và $W_E = \sum_{i \in E} w_i$, $w_i > 0$. Xác định một hàm tập chỉ số $\mathcal{F}$ như sau:

$$\mathcal{F}(E) = h(W_E) f\left(\left[\frac{1}{W_E} \sum_{i \in E} w_i A_i^p\right]^{1/p}\right) - \sum_{i \in E} h(w_i) f(A_i), \tag{2.1.9}$$

Định lý 2.1.4. *Cho $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm nhân tính trên, $f : K \to \mathbb{R}^+$ là hàm (p, h)-lồi toán tử. Với M và E là các tập khác rỗng, gồm hữu hạn các số nguyên dương sao cho $M \cap E = \emptyset$. Khi đó*

$$\mathcal{F}(M \cup E) \le \mathcal{F}(M) + \mathcal{F}(E).$$

với mọi $w_i > 0$ $(i \in M \cup E)$, và các ma trận tự liên hợp dương A_i $(i \in M \cup E)$ có phổ thuộc K.

2.1.3 Mô tả các hàm (p, h)-lồi toán tử

Chúng tôi chứng minh một bất đẳng thức dạng Hansen-Pedersen cho các hàm (p, h)-lồi toán tử.

Định lý 2.1.5. *Cho $h : J \to \mathbb{R}^+$ là một hàm nhân tính trên, $f : K \to \mathbb{R}^+$ là hàm (p, h)-lồi toán tử. Khi đó, với mọi ma trận tự liên hợp A, B có phổ trong K và mọi ma trận C, D sao cho $CC^* + DD^* = I_n$,*

$$f\left([CA^pC^* + DB^pD^*]^{1/p}\right) \le 2h(1/2)\left(Cf(A)C^* + Df(B)D^*\right).$$

Tikhonov [81] đã chỉ ra một mô tả mới cho các hàm lồi toán tử bằng cách thay đổi vai trò các số và các ma trận trong bất đẳng thức Jensen. Trong định lý sau, chúng tôi đạt được một vài điều kiện tương đương để một hàm là (p, h)-lồi toán tử. Chứng minh của định lý tương tự như trong chứng minh của [44] và [81].

Định lý 2.1.6. *Cho f là một hàm không âm trên K sao cho $f(0) = 0$, và h là một hàm nhân tính trên, khác không, không âm trên J thoả $2h(1/2) \leq \alpha^{-1}h(\alpha)$ $(\alpha \in (0,1))$. Các khẳng định sau tương đương:*

(i) f là hàm (p, h)-lồi toán tử;

(ii) Với mọi ma trận co $(||V|| \leq 1)$ và ma trận tự liên hợp A có phổ trong K,

$$f\left([V^* A^p V]^{1/p}\right) \leq 2h(1/2)V^* f(A)V;$$

(iii) Với mọi phép chiếu trực giao Q và ma trận tự liên hợp A với $\sigma(A) \subset K$,

$$f\left([QA^pQ]^{1/p}\right) \leq 2h(1/2)Qf(A)Q;$$

(iv) Với mọi số tự nhiên k, và họ các toán tử dương $\{A_i\}_{i=1}^k$ trong không gian Hilbert hữu hạn chiều $\mathbb{H}$ thoả $\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = I_{\mathbb{H}}$ (toán tử đơn vị trong $\mathbb{H}$),

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i^p A_i\right]^{1/p}\right) \leq \sum_{i=1}^k h(\alpha_i) f(x_i) A_i, \qquad \forall x_i \in K.$$

Chú ý 2.1.3. *Ở đây chúng tôi chỉ ra một ví dụ về hàm h khác hàm đồng nhất và thoả các điều kiện trong Định lý 2.1.3. Dễ dàng kiểm tra rằng hàm $h(x) = x^3 - x^2 + x$ và $\forall x, y \in [0, 1]$ thì*

$$h(xy) - h(x)h(y) = xy(x + y)(1 - x)(1 - y) \geq 0.$$

Do đó, h là hàm nhân tính trên trên $[0, 1]$. Cùng lúc đó, hàm $h(x)/x = x^2 - x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1/2$, và do đó $2h(1/2) \leq h(x)/x$ với mọi $x \in (0, 1)$.

Trong hệ quả sau chúng tôi đạt được một mối liên hệ giữa các hàm (p, h)-lồi toán tử và hàm đơn điệu toán tử trên $\mathbb{R}^+$.

Hệ quả 2.1.2. *Cho f là hàm $(1, h)$-lồi toán tử trên $\mathbb{R}^+$ sao cho $f(0) = 0$. Khi đó với mọi ma trận xác định dương $A \leq B$,*

$$A^{-1}f(A) \leq 2h(1/2)B^{-1}f(B).$$

Nếu $2h(1/2) \leq 1$, hàm $t^{-1}f(t)$ đơn điệu toán tử trên $(0, \infty)$, và do đó hàm $f(t)$ là lồi toán tử.

2.2 Hàm (r, s)-lồi toán tử

Cho r, s là các số thực dương. Đặt $X = (A_1, A_2)$ với $\sigma(A_1), \sigma(A_2) \subset K$ and $\omega_1, \omega_2 \geq 0$. Đặt $W = \omega_1 + \omega_2 > 0$. Trung bình luỹ thừa r của hai ma trận, ký hiệu $M^{[r]}(X, W)$, được định nghĩa bởi

$$M^{[r]}(X, W) := \left(\frac{1}{W}\sum_{i=1}^2 \omega_i A_i^r\right)^{1/r}.$$

Định nghĩa 2.2.1. Cho K là một tập con r-lồi của $\mathbb{R}^+$. Một hàm liên tục $f : K \to (0, \infty)$ được gọi là *(r, s)-lồi toán tử* nếu

$$f(M^{[r]}(X, W)) \leq M^{[s]}(f(X), W) \tag{2.1.16}$$

với mọi $X = (A_1, A_2)$ và $W = \omega_1 + \omega_2$ với $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$. Nếu bất đẳng thức (2.2.16) đảo ngược, f là *(r, s)-lõm toán tử.*

Người đọc có thể chú ý có sự tương tự trong ký hiệu này với hàm (p, h)-lồi toán tử. Tuy nhiên, nhầm lẫn này không đáng có, vì hàm h là hàm nhân tính trên nên khác hàm hằng, trong khi r là số thực dương.

2.2.1 Bất đẳng thức dạng Jensen và dạng Rado

Cho $X = (A_1, ..., A_m)$ gồm các ma trận Hermit, có phổ trong K và $W = (\omega_1, ..., \omega_m)$ là các số không âm. Ký hiệu $W_m = \omega_1 + ... + \omega_m > 0$. Trung bình luỹ thừa của ma trận $M_m^r(X, W)$ được định nghĩa

$$M_m^{[r]}(X, W) := \left(\frac{1}{W_m} \sum_{i=1}^{m} \omega_i A_i^r \right)^{1/r}.$$

Trong định lý sau, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức dạng Jensen cho các hàm (r, s)-lồi toán tử.

Định lý 2.2.1. *Cho r, s là các số dương, và m là số tự nhiên. Nếu f là hàm (r, s)-lồi toán tử, khi đó với $X = (A_1, \cdots, A_m)$ và $W = (\omega_1, \cdots, \omega_m)$ thì*

$$f(M_m^{[r]}(X, W)) \leq M_m^{[s]}(f(X), W). \tag{2.1.18}$$

Nếu f là (r, s)-lõm toán tử thì bất đẳng thức (2.2.18) đảo ngược.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức dạng Rado cho các hàm (r, s)-lồi toán tử.

Định lý 2.2.2 *Cho r và s là các số dương và f là hàm liên tục trên K. Cho $m \in \mathbb{N}$, $X = (A_1, \cdots, A_m)$ và $W = (\omega_1, \cdots, \omega_m)$, biểu diễn*

$$a_m = W_m \left(M_m^{[s]} [f(X), W]^s - f\left(M_m^{[r]}[X, W]^s \right) \right).$$

Khi đó các khẳng định sau tương đương

(i) Nếu f là hàm (r, s)-lồi toán tử thì $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ là dãy đơn điệu tăng.

(ii) Nếu f là hàm (r, s)-lõm toán tử thì $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ là dãy đơn điệu giảm.

2.2.2 Một số điều kiện tương đương cho tính (r, s)-lồi toán tử

Định lý 2.2.3. *Cho $f : K \to \mathbb{R}^+$ là hàm (r, s)-lồi toán tử. Khi đó với mọi ma trận xác định dương A, B có phổ trong K và mọi ma trận C, D thỏa $CC^* + DD^* = I$,*

$$f((CA^rC^* + DB^rD^*)^{1/r}) \leq (Cf(A)^sC^* + Df(B)^sD^*)^{1/s}. \tag{2.2.20}$$

Định lý 2.2.4. *Cho f là hàm không âm trên K thỏa $f(0) = 0$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) f là hàm (r, s)-lồi toán tử;

(ii) Với mọi phép co V ($||V|| \leq 1$) và mọi ma trận nửa xác định dương A có phổ thuộc K,

$$\left((V^*A^rV)^{1/r} \right) \leq (V^*f(A)^sV)^{1/s};$$

(iii) Với mọi phép chiếu trực giao Q và ma trận nửa xác định dương A có phổ $\sigma(A)$ thuộc K,

$$f\left((QA^rQ)^{1/r} \right) \leq (Qf(A)^sQ)^{1/s};$$

(iv) Với mọi số tự nhiên k và mọi họ toán tử dương $\{A_i\}_{i=1}^k$ trong không gian Hilbert hữu hạn chiều $\mathbb{H}$ sao cho $\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = I_{\mathbb{H}}$ (toán tử đơn vị trong $\mathbb{H}$) và các số tuỳ ý $x_i \in K$,

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^r A_i \right]^{1/r} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)^s A_i \right)^{1/s}.$$

Chương 3

Bất đẳng thức ma trận và tính chất trong hình cầu

Trong phần đầu của chương này, chúng tôi xét bất đẳng thức Cauchy ngược tổng quát cho hai ma trận xác định dương A và B và chứng minh rằng các bất đẳng thức Cauchy ngược tổng quát đúng với điều kiện $AB + BA \geq 0$. Hơn nữa, chúng tôi cũng chứng minh rằng bất đẳng thức Cauchy ngược và bất đẳng thức Powers-Størmer tổng quát đúng đối với chuẩn bất biến unita với cùng điều kiện $AB + BA \geq 0$. Trong phần thứ hai của chương, chúng tôi chứng minh các bất đẳng thức ngược của trung bình Heinz cho ma trận đối với chuẩn bất biến unita. Và phần cuối cùng của chương là tính chất trong hình cầu cho trung bình ma trận.

Chương này được viết dựa vào các kết quả trong công trình [50] và [52].

3.1 Bất đẳng thức trung bình cộng - nhân ngược tổng quát

Định lý 3.1.1. *Cho f là hàm đơn điệu toán tử dương ngặt, xác định trên $[0,\infty)$ với $f((0,\infty)) \subset (0,\infty)$ và $f(1) = 1$. Khi đó với mọi ma trận nửa xác định dương A và B thỏa $AB + BA \geq 0$ thì,*

$$A + B - |A - B| \leq 2A\sigma_f B.$$

3.2 Các bất đẳng thức ngược cho trung bình ma trận Heinz

Trong [47, Theorem 2.1] tác giả đã chứng minh rằng, với mọi trung bình toán tử σ và các ma trận xác định dương A, B thì,

$$\frac{A+B}{2} - A\sigma B \leq \frac{1}{2}A^{1/2}\big|I - A^{-1/2}BA^{-1/2}\big|A^{1/2}. \tag{3.2.9}$$

Mục đích của phần này là trình bày các bất đẳng thức ngược tổng quát có dạng (3.2.9) đối với chuẩn bất biến unita. Chúng tôi đạt được một bất đẳng thức ngược mới cho trung bình Heinz.

3.2.1 Bất đẳng thức trung bình cộng - Heinz - nhân đối với chuẩn bất biến unita

Nhắc lại rằng một chuẩn $|||\cdot|||$ trong $\mathbb{M}_n$ gọi là bất biến unita nếu $|||UAV||| = |||A|||$ với mọi ma trận unita U, V và mọi ma trận $A \in \mathbb{M}_n$.

Định lý 3.2.1. *Với $|||\cdot|||$ là chuẩn bất biến unita trên $\mathbb{M}_n$, f là một hàm đơn điệu toán tử trên $[0,\infty)$ thỏa $f((0,\infty)) \subset (0,\infty)$ và $f(0) = 0$. g là một hàm xác định trên $[0,\infty)$ sao cho $g(t) = \frac{t}{f(t)}$ $(t \in (0,\infty))$*

thỏa $g(0) = 0$. Khi đó với mọi $A, B \in \mathbb{P}_n$,

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}A^{1/2}\left|I - A^{-1/2}BA^{-1/2}\right|A^{1/2}\right|\right|\right| &\leq \left|\left|\left|f(A)^{1/2}g(B)f(A)^{1/2}\right|\right|\right| \\ &\leq \left|\left|\left|f(A)g(B)\right|\right|\right|. \end{aligned}$$

Hệ quả 3.2.1. *Cho $A, B \in \mathbb{P}_n$ và $s \in [0, 1]$. Khi đó,*

$$\left|\left|\left|\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}A^{1/2}|I - A^{-1/2}BA^{-1/2}|A^{1/2}\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|A^{1/2}B^{1/2}\right|\right|\right|.$$

Hệ quả 3.2.2. *Cho $A, B \in \mathbb{H}_n^+$ và $s \in [0, 1]$. Khi đó,*

$$\left|\left|\left|\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}A^{1/2}|I - A^{-1/2}BA^{-1/2}|A^{1/2}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{2}\left|\left|\left|A^sB^{1-s} + A^{1-s}B^s\right|\right|\right|.$$

Hệ quả 3.2.3. *Với mọi ma trận Hermite nửa xác định dương A, B thỏa $AB + BA \geq 0$ và $s \in [0, 1]$ thì,*

$$|||A + B - |A - B|||| \leq 2|||A^{1/2}B^{1/2}|||$$

và

$$|||A + B - |A - B|||| \leq 2|||A^sB^{1-s} + A^{1-s}B^s|||.$$

3.2.2 Bất đẳng thức ngược cho trung bình ma trận Heinz đối với chuẩn Hilbert-Schmidt

Rõ ràng với mọi số dương a và b,

$$(a + b)^2 - |a^2 - b^2| \leq (a^sb^{1-s} + a^{1-s}b^s)^2. \tag{3.2.19}$$

Trong phần này, chúng tôi đạt được một vài bất đẳng thức ngược cho trung bình ma trận Heinz đối với chuẩn Hilbert-Schmidt.

Định lý 3.2.2. *Với mọi ma trận Hermite nửa xác định dương $A, B \in \mathbb{H}_n^+$ và ma trận $X \in \mathbb{M}_n$,*

$$||AX + XB||_2^2 - ||AX - XB||_2^2 \leq ||A^sXB^{1-s} + A^{1-s}XB^s||_2^2.$$

3.3 Tính chất trong hình cầu cho các trung bình toán tử

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu tính chất trong hình cầu cho các toán tử. Trong định lý tiếp theo, chúng tôi cung cấp một mô tả mới của trung bình cộng ma trận bởi bất đẳng thức (3.1.6).

Định lý 3.3.1. *Cho σ là một trung bình đối xứng tuỳ ý. Nếu với mọi chuẩn bất biến unita $|||\cdot|||$ trên $\mathbb{M}_n$ và*

$$\left|\left|\left|\frac{A+B}{2} - A\sigma B\right|\right|\right| \leq \frac{1}{2}|||A - B|||$$

với $A, B \in \mathbb{P}_n$ thì khi đó σ là trung bình cộng.

Trong phần còn lại của luận án, chúng tôi sẽ chứng minh rằng nếu chúng ta thay thế các trung bình theo nghĩa Kubo-Ando bởi trung bình luỹ thừa $M_p(A, B, t) = (tA^p + (1 - t)B^p)^{1/p}$ với $p \in [1, 2]$ thì bất đẳng thức trong định lý 3.3.1 đúng mà không cần điều kiện $AB + BA \geq 0$. Mặt khác, trung bình luỹ thừa ma trận $M_p(A, B, t)$ thoả mãn tính chất trong hình cầu đối với chuẩn Hilbert Schmidt.

Định lý 3.3.2. *Cho* $p \in [1,2]$ *và* $M_p(A,B,t) = (tA^p + (1-t)B^p)^{1/p}$. *Khi đó với mọi ma trận nửa xác định dương* A *và* B,

$$\left|\left|\left|\frac{A+B}{2} - M_p(A,B,t)\right|\right|\right|_2 \le \frac{1}{2}\left|\left|\left|A-B\right|\right|\right|_2. \tag{3.2.28}$$

Kết luận

Các kết quả chính của luận án

1. Đưa ra định nghĩa cho các lớp hàm (p, h)-lồi toán tử và đạt được một số tính chất của lớp hàm lồi toán tử này. Đây là một lớp hàm lồi toán tử mới, tổng quát hoá cho nhiều lớp hàm lồi toán tử đã biết.
2. Đưa ra một bất đẳng thức kiểu Jensen cho các hàm (p, h)-lồi toán tử, tổng quát hoá cho nhiều dạng bất đẳng thức kiểu Jensen cho các lớp hàm lồi toán tử đã biết.
3. Đưa ra một bất đẳng thức kiểu Hansen-Pedersen cho các lớp hàm (p, h)-lồi toán tử, chứng minh một bất đẳng thức cho hàm tập chỉ số đối với lớp hàm này.
4. Đưa ra định nghĩa cho lớp hàm (r, s)-lồi toán tử và đạt được một số tính chất cho chúng. Đây cũng là một lớp hàm lồi toán tử mới, tổng quát hoá cho các lớp hàm r-lồi đã biết.
5. Đưa ra bất đẳng thức kiểu Jensen và kiểu Rado cho các lớp hàm (r, s)-lồi toán tử.
6. Đưa ra một vài điều kiện tương đương để một hàm là (p, h)-lồi toán tử hoặc (r, s)-lồi toán tử.
7. Đưa ra và chứng minh được một bất đẳng thức trung bình cộng-nhân ngược tổng quát đối với trung bình theo Kubo-Ando.
8. Đưa ra một vài bất đẳng thức chuẩn ngược đối với trung bình Heinz ma trận.
9. Đạt được một mô tả mới của trung bình cộng ma trận bởi một bất đẳng thức ma trận đối với chuẩn bất biến unita.
10. Đưa ra tính chất trong hình cầu cho các trung bình ma trận đối với chuẩn bất biến unita và chuẩn Hilbert-Schmidt. Đồng thời, chúng tôi cũng chứng minh được trung bình luỹ thừa ma trận thoả tính chất trong hình cầu đối với chuẩn Hilbert-Schmidt.

Hướng nghiên cứu trong tương lai

Trong tương lai gần, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau

1. Chúng tôi tiếp tục mô tả một số lớp mới của tính lồi toán tử đối với một số trung bình ma trận phổ biến.

2. Cho p, q là các số thực dương, h là hàm thực, không âm, nhân tính trên. Chúng tôi xem xét một định nghĩa tổng quát như sau: Một hàm f được gọi (p, h, q)-lồi toán tử nếu

$$f\left(\left[\alpha A^p + (1-\alpha)B^p\right]^{1/p}\right) \leq \left[h(\alpha)f(A)^q + h(1-\alpha)f(B)^q\right]^{1/q}.$$

   Nếu $q = 1$ thì f là $(p, h, 1)$-lồi toán tử hay nói gọn là (p, h)-lồi toán tử. Nếu $h \equiv id$ là hàm đồng nhất thì f là (p, id, q)-lồi toán tử, hay gọi tắt là (r, s)-lồi toán tử. Chúng tôi dự định tiếp tục nghiên cứu lớp hàm lồi toán tử tổng quát này đối với một vài trường hợp khác.

3. Tính chất trong hình cầu của trung bình ma trận. Chúng tôi tin rằng trung bình luỹ thừa ma trận thoả mãn tính chất trong hình cầu đối với chuẩn p-Schatten và với chuẩn bất biến unita.

4. Chúng tôi xác định các lớp mới của entropy lượng tử liên hệ với các lớp mới của các hàm lồi toán tử. Điều đó có thể có ý nghĩa trong việc nghiên cứu các tính chất của chúng và các ứng dụng trong lý thuyết thông tin lượng tử.

Tài liệu tham khảo

[1] P. A. Absil, R. E. Mahony, R. Sepulchre (2007), *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*, Princeton.

[2] A. Aleman (1985), "On some generalizations of convex sets and convex functions", *Anal. Numer. Theor. Approx.*, 14(1), 1-6.

[3] W. N. Anderson, R. J. Duffin (1969), "Series and parallel addition of matrices", *J. Math. Anal. Appl.*, 26, 576-594.

[4] W. N. Anderson Jr. , G. E. Trapp (1975), "Shorted operators II", *SIAM J. Appl. Math*, 28, 60-71.

[5] T. Ando (1978), *Topics on operator inequalities*, Lecture Note, Sapporo.

[6] T. Ando (1979), "Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products", *Linear Algebra Appl.* , 26, 203-241.

[7] T. Ando, C.K. Li, R. Mathias (2004), "Geometric means", *Linear Algebra Appl.*, 385, 305-334.

[8] G. W. Anderson, M. K. Vamanamurthy, M. K. Vuorinen (2007), "Generalized convexity and inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, 335(2), 1294-1308.

[9] K. M. R. Audenaert (2013), "In-betweenness, a geometrical monotonicity property for operator means", *Linear Algebra Appl.*, 438(4), 1769-1778.

[10] K. M. R. Audenaert, J. Calsamiglia, Ll. Masanes, R. M Tapia, A. Acin, E. Bagan, F. Verstraete (2007), "Discriminating States: The Quantum Chernoff Bound", *Phys. Rev. Lett.*, 98, 160501.

[11] T. Ando, F. Hiai (2011), "Operator log-convex functions and operator means", *Math. Ann.*, 350(3), 611-630.

[12] K. M. R. Audenaert, F. Hiai (2013), "On matrix inequalities between the power means: Counterexamples", *Linear Algebra Appl.*, 439, 1590-1604.

[13] M. Bakherad, H. Abbas, B. Mourad, M. S. Moslehian (2014), "Operator P-class functions", *J. Inequal. Appl.*, 451.

[14] J. Bendat, S. Sherman (1955), "Monotone and convex operator functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79, 58-71.

[15] K. V. Bhagwat, R. Subramanian (1978), "Inequalities between means of positive operators", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 83, 393-401.

[16] R. Bhatia (1997), *Matrix Analysis*, Springer, New York.

[17] D. A. Bini, B. Meini, F. Poloni (2010), "An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties", *Math. Comput.*, 79, 437-452.

[18] R. Bhatia, J. Holbrook (2006), "Riemannian geometry and matrix geometric means", *Linear Algebra Appl.*, 413(2-3), 594-618.

[19] W. W. Breckner (1978), "Stetigkeitsaussagen fureine Klasse verallgemeinerter knovexer funktionen in topologischen linearen Raumen", *Publ. Inst. Math.*, 23, 13-20.

[20] E. A. Carlen (2010), "Trace inequalities and quantum entropy: An introductory course", Contemp. Math., 529, 73-140.

[21] E. A. Carlen, E. H. Lieb (1999), "A Minkowski type-trace inequality and strong subadditivity of quantum entropy", *Amer. Math. Soc. Transl.*, 18(2), 59-69.

[22] F. Chen, X. Liu (2013), "Refinements on the Hermite Hadamard Inequalities for r-convex functions", *Hindawi Publishing Corporation, J. Appl. Math.*, 2013, 1-5.

[23] H. Chernoff (1952), "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations", *Ann. Math. Stat.*, 4(23), 493-507.

[24] M.-D Choi (1974), "A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras", *Illinois J. Math.*, 18, 565-574.

[25] C. Davis (1957), "A Schwarz inequality for convex operator functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 42-44.

[26] S. S. Dragomir (2001), "Refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for log-convex functions", *Aus. Math. Soc. Gazette*, 28(3), 129-133.

[27] S. S. Dragomir, C. E.M. Pearce (2000), *Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University.

[28] S. S. Dragomir, J. Pečarić, L.-Erik Persson (1995), "Some inequalities of Hadamard type", *Soochow J. Math.*, 21, 335-341.

[29] Z. B. Fang, R. Shi (2014), "On the (p, h)-convex function and some integral inequalities", *J. Inequal. Appl.*, 45.

[30] J. I. Fujii, M. Kian, M. S. Moslehian (2010), "Operator Q-class functions", *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 73(1), 75-80.

[31] J. I. Fujii, M. Nakamura, J. Pečarić, Y. Seo (2006), "Bounds for the ratio and difference between parallel sum and series via Mond-Pecaric method", *Math. Inequal. Appl.*, 9(4), 749-759.

[32] S. Furuichi (2011), "Inequalities for Tsallis relative entropy and generalized skew information", *Linear and Multilinear Alg.*, 59(10), 1143-1158.

[33] S. Furuichi (2012), "Refined Young inequalities with Specht's ratio", *J. Egyptian Math. Soc.*, 20(1), 46-49.

[34] S. Furuichi, K. Yanagi, K. Kuriyama (2004), "Fundamental properties of Tsallis relative entropy", *J. Math. Phys.*, 45(12), 4868-4877.

[35] J. Jensen (1906), "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes", *Acta Math.*, 30(1), 175-193.

[36] P.M. Gill, C.E.M. Pearce, Pečarić (1997), "Hadamard's inequality for r-convex functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 215(2), 461-470.

[37] E. K. Godunova, V. I. Levin (1985), “Inequalities for functions of a broad class that contains convex, monotone and some other forms of functions", *Numerical Math. and Math. Phys.*, 166, 138-142.

[38] K. Guan (2010), “Multiplicative convexity and its applications", *J. Math. Anal. Appl.*, 362, 156-166.

[39] K. Guan (2013), “GA-convexity and its applications", *Analysis Math.*, 39, 189-208.

[40] E. Heinz (1951), “Beitrage zur Storungstheorie der Spektralzerlengung", *Math. Ann.*, 123, 415-438.

[41] F. Hansen (1980), “An operator inequality", *Math. Ann.*, 246(3), 249-250.

[42] F. Hansen (2006), “Extensions of Lieb's concavity Theorem”, *J. Stat. Physics*, 124(1), 87-101.

[43] F. Hansen, G. Ji, J. Tomiyama (2004), “Gaps between classes of matrix monotone functions", *Bull. London Math. Soc.*, 36, 53-58.

[44] F. Hansen, G. K. Pedersen (1982), “An inequality for operators and Løwner theorem”, *Math. Ann.*, 258(3), 229-241.

[45] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, C. Beny (2011), “Quantum f-divergences and error correction”, *Rev. Math. Phys.*, 23, 691-747.

[46] F. Hiai, D. Petz (2013), *Introduction to Matrix Analysis ans Applications*, Springer.

[47] D. T. Hoa (2015), “On characterization of operator monotonicity", *Linear Algebra Appl.*, 487, 260-267.

[48] D. T. Hoa, D. T. Duc, V. T. B. Khue (2017), “A new type of operator convexity", accepted for publication in Acta Mathematica Vietnamica.

[49] D. T. Hoa, R. Dumitru, J. A. Franco (2017), “On the monotonicity of weighted power means for matrices", *Linear Algebra Appl.*, 527, 128-140.

[50] D. T. Hoa, V. T. B. Khue, H. Osaka (2016), “A generalized reverse Cauchy inequality for matrices", *Linear and Multilinear Alg.*, 64, 1415-1423.

[51] D. T. Hoa, V. T. B. Khue (2017), “Some inequalities for operator (p, h)-convex functions", *Linear and Multilinear Alg.* (http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2017.1307914).

[52] D. T. Hoa, V. T B Khue, T.-Y. Tam (2017), “In-sphere property and reverse inequalities for the matrix Heinz mean", submitted.

[53] D. T. Hoa, H. Osaka, H. M. Toan (2013), “On generalized Powers-Størmer's Inequality", *Linear Algebra Appl.*, 438(1), 242-249.

[54] D. T. Hoa, H. Osaka, J. Tomiyama (2015), “Characterization of operator monotone functions by Powers-Størmer type inequalities", *Linear and Multilinear Alg.*, 63(8), 1577-1589.

[55] T. Hawkins (1975), “Cauchy and the spectral theory of matrices”, *Historia Mathematica*, 2(1), 1-29.

[56] R. A. Horn, C. R. Johnson (1985), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

[57] R. V. Kadison (1952), “A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras”, *Ann. Math.* 56, 494-503.

[58] M. Kian, M. S. Moslehian (2015), "Operator Inequalities related to Q-Class functions", *Math. Slovaca*, 65(1), 179-190.

[59] F. Kittaneh, Y. Manasrah (2010),"Improved Young and Heinz inequality for matrices", *J. Math. Anal. Appl.*, 361, 262-269.

[60] F. Kraus (1936), "Überkonvexe Matrixfunktionen", *Math. Z.* 41, 18-42.

[61] F. Kubo, T. Ando (1980), "Means of positive linear operators", *Math. Ann.*, 246(3), 205-224.

[62] M. S. Moslehian, M. Kian (2012), "Jensen type inequalities for Q-class functions", *Bull. Aust. Math. Soc.*, 85(1), 128-142.

[63] H. S. Lee, Y. D. Lim, T. Yamazaki (2011), "Multi-variable weighted geometric means of positive definite matrices", *Linear Algebra Appl.* 435, 307-322.

[64] E. H. Lieb (1973), "Convex Trace Functions and the Wigner-Yanase-Dyson Conjecture", *Advances in Math.*, 11, 267-288.

[65] E. H. Lieb, M. B. Ruskai (1973), "Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy", *J. Math. Phys.*, 14, 1938-1941.

[66] C. Loewner (1934), "Über monotone Matrixfunctionen", *Math. Z.*, 38, 177-216.

[67] M. Moakher (2005), "A differential-geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 26(3), 735-747.

[68] S. R. Mohan, S. K. Neogy (1995), "On invex sets and preinvex functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 189(3), 901-908.

[69] E. A. Morozova, N. N. Chentsov (1991), "Markov invariant geometry on state manifolds", *J. Soviet Math.*, 56(5), 2648-2669.

[70] M. S. Moslehian, M. Kian (2012), "Jensen type inequalities for Q-class functions", *Bull. Aust. Math. Soc.*, 85, 128-142.

[71] M. A. Naimark (1943), "On a representation of additive operator set functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 41(9), 373-375. (Russian); English translation: C.R. (Doklady) Akad. Sci. USSR. (N.S.) 41, 359-361.

[72] M. A. Nielsen, I. L. Chuang (2011), *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press.

[73] M. A. Nielsen, D. Petz (2005), "A simple proof of the strong subadditivity inequality", *Quantum Inf. Comput.*, 5(6), 507-513.

[74] Y. Ogata (2011), "A Generalization of Powers-Stømer Inequality", *Let. Math. Phys.*, 97(3), 339-346.

[75] H. Osaka, S. Silvestrov, J. Tomiyama (2007), "Monotone operator functions, gaps and power moment problem", *Math. Scand.* 100(1), 161-183.

[76] CEM. Pearce, AM. Rubinov (1999), "p-functions, quasi-convex functions and Hadamard-type inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, 240, 92-104.

[77] M. Pálfia (2016), "Operator means of probability measures and generalized Karcher equations", *Advances in Math.*, 289, 951-1007.

[78] D. Petz (1996), "Monotone metrics on matrix spaces", *Linear Algebra Appl.* 244(1), 81-96.

[79] W. Pusz, S. . Woronowicz (1975), "Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map", *Rep. Math. Phys.* 8, 159-170.

[80] M. B. Ruskai (2007), "Another short and elementary proof of strong subadditivity of quantum entropy", *Rep. Math. Phys.*, 60(1), 1-12.

[81] O. E. Tikhonov (2006), "A note on definition of matrix convex functions", *Linear Algebra Appl.*, 416(2-3), 773-775.

[82] KL. Tseng, GS. Yang, SS. Dragomir (2003), "ON quasi-convex functions and Hadamard's inequality", *RGMIA Res. Rep. Collect*, 6(3), Article ID 1.

[83] M. Uchiyama (1993), "Commutativity of selfadjoint operators", *Pac. J. Math.*, 161, 385-392.

[84] S. Varošanec (2007), "On h-convexity", *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1), 303-311.

[85] X. Zhan (2002), *Matrix Inequalities*, Springer.

[86] G. Zabandan, A. Bodaghi, A. Kiliçmann (2012), "The Hermite-Hadamard inequality for r-convex functions", *J. Ineq. Appl.*, 215.

[87] K. Zhang, J. Wan (2007), "p-convex functions and their properties", *Pure Appl. Math.* 23(1), 130-133.

[88] X. Zhang, G. Wang, Y. Chu (2009), "Convexity with respect to Hölder mean involving zero-balanced hypergeometric functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 353(1), 256-259.

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến Luận án

1. D. T. Hoa, V. T. B. Khue, H. Osaka (2016), "A generalized reverse Cauchy inequality for matrices", *Linear and Multilinear Algebra*, 64, 1415-1423.

2. D. T. Hoa, V. T. B. Khue (2017), "Some inequalities for operator (p, h)-convex functions", *Linear and Multilinear Algebra*.

   http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2017.1307914.

3. D. T. Hoa, D. T. Duc, V. T. B. Khue, "A new type of operator convexity", đã được nhận đăng trên tạp chí Acta Mathematica Vietnamica, 2018.

4. D. T. Hoa, V. T. B Khue, T.-Y. Tam (2017), "In-sphere property and reverse inequalities for the matrix Heinz mean", đã gửi đăng.